Rappels : . T.F L^1

. T.F $\mathcal{S}$ isomorphisme d'inverse $(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}$.

$$\int \hat{\varphi}\,\psi = \int \varphi\,\hat{\psi} \quad \longleftrightarrow \quad \text{T.F } (\mathcal{S}') \in \mathcal{S}'$$

$$\int \varphi\,\bar{\psi} = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}\,\bar{\hat{\psi}} \quad \longleftrightarrow \quad \text{T.F } L^2 \text{ isom.}$$

V Transformée de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

$$e_\xi(x) := e^{-ix\cdot\xi}$$

THM : Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}E \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et est donnée par $\langle E, e_\xi \rangle$. De plus $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ tels que

$$|\partial^\alpha(\mathcal{F}E)(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m.$$

Démonstration : Soit $v(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle$.

Comme $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$ est de classe C^∞, on sait que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on a $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

Soit K un voisinage du support de E et χ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur K. Alors

$$v(\xi) = \langle E, \chi e_\xi \rangle$$ et on a

$$\partial_\xi^\alpha v(\xi) = \langle E, \partial_\xi^\alpha (\chi e_\xi) \rangle$$
$$= \langle E, \chi (-i\,\cdot)^\alpha e_\xi \rangle.$$

Soit p l'ordre de E. Alors

$$|\partial^\alpha v(\xi)| \leq C \sup_{|\beta| \leq p} \sup_{x \in K} \left|\partial_x^\beta \left(\chi(x) x^\alpha e_\xi(x)\right)\right|.$$
$$\leq C' \langle \xi \rangle^p.$$

(C' dépend de K, de p de α, de χ ... de E)

. Montrons que $v = \mathcal{F}E$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Alors
$$\langle v, \varphi \rangle = \int v(\xi) \varphi(\xi) d\xi$$
$$= \int \langle E, e_\xi \rangle \varphi(\xi) d\xi$$
$$= \langle E, \int e_\xi \varphi(\xi) d\xi \rangle$$
$$= \langle E, \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle$$
$$= \langle E, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$
$$= \langle \mathcal{F}E, \varphi \rangle.$$

Donc $v = \mathcal{F}E$. ∎

<u>Remarque</u> : si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g(x) := \int f(x-y) g(y) dy$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

On a alors $\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f*g(x)\, dx$

et donc $\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} \int f(x-y)g(y)\,dy\,dx$

$$= \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)\, e^{-iy\cdot\xi} g(y)\,dy\,dx$$

$$= \int e^{-iz\cdot\xi} f(z)\,dz \int e^{-iy\cdot\xi} g(y)\,dy$$

$$= \mathcal{F}f(\xi)\, \mathcal{F}g(\xi).$$

<u>Théorème</u> : Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Alors $E*S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et

$$\underbrace{\mathcal{F}(\underbrace{E*S}_{\mathcal{S}'})}_{\mathcal{S}'} = \underbrace{\mathcal{F}E}_{\text{Thm précédent}}\ \underbrace{\mathcal{F}S}_{\mathcal{S}'} \in \mathcal{S}'.$$

<u>Démonstration</u> : 1. $\mathcal{F}(\mathcal{E}' * \mathcal{D})$

2. $\mathcal{F}(\mathcal{E}' * \mathcal{S})$ densité

3. $\mathcal{F}(\mathcal{E}' * \mathcal{S}')$ dualité

1. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Mq $\mathcal{F}(E*\varphi) = \mathcal{F}E\, \mathcal{F}\varphi$. On sait que $E*\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}(E*\varphi)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} E*\varphi(x)\,dx$$

$$= \int e^{-ix\cdot\xi} \langle E, \varphi(x-\cdot)\rangle\,dx \qquad \underbrace{x-y}_{z}+y$$

$$= \langle E, \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x-\cdot)\,dx\rangle$$

$$= \langle E, e_\xi \hat{\varphi}(\xi)\rangle$$

Donc $\mathcal{F}(E*\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) < E, e_\xi >$

$$= \mathcal{F}E(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi).$$

2. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Soit (φ_n) une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que φ_n converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Alors $\mathcal{F}(E*\varphi_n) = \mathcal{F}E\, \mathcal{F}\varphi_n$

Mais $E*\varphi_n \longrightarrow E*\varphi$ dans $\mathcal{S}$

(car $p_{m,j}(E*\varphi) \leq C\, p_{m,j+p}(\varphi) \leftarrow$ déjà vu)

donc $\mathcal{F}(E*\varphi_n) \longrightarrow \mathcal{F}(E*\varphi)$ dans $\mathcal{S}$

Par ailleurs $\mathcal{F}E\, \mathcal{F}\varphi_n \longrightarrow \mathcal{F}E\, \mathcal{F}\varphi$

d'où $\mathcal{F}(E*\varphi) = \mathcal{F}E\, \mathcal{F}\varphi$.

3. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$< \mathcal{F}(E*S), \varphi > = < E*S, \mathcal{F}\varphi >$$
$$= < S, \check{E} * \mathcal{F}\varphi >.$$

$$\check{E} * \mathcal{F}\varphi = (2\pi)^{-d}\, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\check{E} * \mathcal{F}\varphi)$$
$$= (2\pi)^{-d}\, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\check{E}\ \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi)$$

d'après 2.

Donc $\check{E} * \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}\check{E}\ \varphi)$.

$\bar{\mathcal{F}}\varphi(x) = \int e^{+ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$

$\check{\bar{\mathcal{F}}}\varphi(x) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$

Mais $\bar{\mathcal{F}}\check{E} = \mathcal{F}E$

en effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \bar{\mathcal{F}}\check{E}, \varphi \rangle = \langle \check{E}, \bar{\mathcal{F}}\varphi \rangle$$
$$= \langle E, \check{\bar{\mathcal{F}}}\varphi \rangle$$
$$= \langle E, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Donc $\check{E} * \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}E\ \varphi)$

Donc
$$\langle \mathcal{F}(E*S), \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}(\mathcal{F}E\ \varphi) \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}S, \mathcal{F}E\ \varphi \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}E\ \mathcal{F}S, \varphi \rangle.$$

D'où le résultat : $\mathcal{F}(E*S) = \mathcal{F}E\ \mathcal{F}S$. ∎

PROPOSITION : Si $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}E$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration : Soit $e_{\xi+i\eta}(x) := e^{-ix(\xi+i\eta)}$,

et soit $F(\xi,\eta) = \langle E, e_{\xi+i\eta} \rangle$.

$$\partial_\xi F(\xi,\eta) = \langle E, \partial_\xi e_{\xi+i\eta} \rangle$$
$$= \langle E, -ix\, e_{\xi+i\eta} \rangle$$

$$\partial_\eta F(\xi,\eta) = \langle E, x\, e_{\xi+i\eta} \rangle.$$

Donc $(\partial_\xi + i\partial_\eta) F = 0$.

Comme $\mathcal{F}E(\xi) = F(\xi, 0)$, avec

$$\xi + i\eta \in \mathbb{C} \longmapsto F(\xi,\eta) \text{ est holomorphe,}$$

d'où le résultat.

<u>Remarque</u> (Théorème de Paley-Wiener).

Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\exists C, N, R$

$$|f(z)| \leq C(1+|z|)^N \exp R\,|\mathrm{Im}(z)|.$$

Alors f est le prolongement analytique de la transformée de Fourier d'une distribution à support dans $[-R, R]$.

<u>Exercice</u> : $f * g = 0$ avec f, g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

ou avec f, g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) = 0$, possible dans $\mathcal{S}$.

impossible dans $\mathcal{D}$.

VI Transformée de Fourier et Séries de Fourier :

$d = 1$

$\int e^{-2i\pi x\cdot\xi} f(x)\,dx$

Théorème (Formule sommatoire de Poisson)

La distribution $T := \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \delta_k$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

et on a $\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \delta_{2k\pi}$.

Démonstration :

. Mq $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\right|$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle k \rangle^2} \times P_{2,0}(\varphi),$$

donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

. Mq $\operatorname{supp} \mathcal{F}T \subset 2\pi\mathbb{Z}$.

On a $T \circ \tau_1 = T$ donc $\mathcal{F}(T\circ\tau_1) = \mathcal{F}T$

donc $e^{i\xi}\mathcal{F}T = \mathcal{F}T$

donc $(e^{i\xi} - 1)\mathcal{F}T = 0$,

et donc $\operatorname{supp} \mathcal{F}T \subset 2\pi\mathbb{Z}$.

. Mq $\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta_{2k\pi}$.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}[$ et χ ~~est~~ à support dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

Alors $\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(\cdot - 2k\pi)\mathcal{F}T$,

donc il s'agit de démontrer que $\chi(\cdot - 2k\pi)\mathcal{F}T = \alpha_k\delta_{2k\pi}$

On a $(e^{i\xi}-1)\,\chi(\xi-2k\pi)\,\mathcal{F}T = 0$.

On voudrait mq $(\xi-2k\pi)\,\chi(\xi-2k\pi)\,\mathcal{F}T = 0$.

On a $(\xi-2k\pi)\,\dfrac{e^{i\xi}-1}{\xi-2k\pi}\,\chi(\xi-2k\pi)\,\mathcal{F}T = 0$.

Donc $\underbrace{\dfrac{e^{i\xi}-1}{\xi-2k\pi}}_{\substack{\downarrow\ \xi\to 2k\pi \\ +i}}\,\chi(\xi-2k\pi)\,\mathcal{F}T = \beta_k\,\delta_{2k\pi}$

$f(\xi)$ $\quad \langle f(\xi)\,\underbrace{\chi(\xi-2k\pi)\mathcal{F}T}, \varphi\rangle = \beta_k\,\varphi(2k\pi)$ $\quad f(2k\pi)$

D'où $\quad \chi(\xi-2k\pi)\,\mathcal{F}T = -i\beta_k\,\delta_{2k\pi}$.

($(x-a)S = 0$ alors $S = c\,\delta_a$).

On a donc $\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -i\beta_k\,\delta_{2k\pi}$.

Montrons enfin que $-i\beta_k = 2\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

On a $T = e^{2i\pi\cdot}\,T$

donc $\mathcal{F}T = \mathcal{F}T\circ\tau_{2\pi}$.

donc $\beta_k = \beta_{k+1}\ \forall k$, donc $-i\beta_k = c$.

Mq $c = 2\pi$. $\quad$ Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$c\int\varphi(x)\,dx = c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\varphi(y)\,dy$$

$$= c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \varphi(y+2k\pi)\,dy \quad (*)$$

$$c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(y+2k\pi) = < \mathcal{F}T, \varphi(\cdot+y) >$$

$$= < T, \mathcal{F}(\varphi(\cdot+y)) >$$

$$= < T, e_{-y}\,\hat{\varphi} > .$$

$$\mathcal{F}(\varphi(x+y))(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x+y)\,dx$$

$$= \int e^{-i(x+y)\cdot\xi + iy\cdot\xi}\varphi(x+y)\,dx$$

$$= e^{iy\cdot\xi}\,\hat{\varphi}(\xi).$$

donc $c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(y+2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{iky}\hat{\varphi}(k)$.

$$c\int \varphi(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{iky}\,\hat{\varphi}(k)\,dy$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)\int_0^{2\pi} e^{iky}\,dy$$

$$= 2\pi\,\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\,dx \;\; 2\pi$$

d'où $c = 2\pi$. ∎

<u>Rappel</u> : . T.F $(\mathcal{E}') \subset C^\infty$

. $\mathcal{F}(\underset{\mathcal{E}'}{E} * \underset{\mathcal{S}'}{S}) = \mathcal{F}E\ \mathcal{F}S$

. Poisson : $\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k\right) = 2\pi \sum \delta_{2k\pi}$

DÉFINITION : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est t-périodique pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ si $T \circ \tau_t = T$.

PROPOSITION : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ périodique, alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Mq $\exists m, j \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \, p_{m,j}(\varphi).$$

On suppose que T est 1-périodique.

On construit une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{h \in \mathbb{Z}} \phi(x+h) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\psi(x) \geq 0$ et telle que $\operatorname{supp} \psi \in]-2, 2[$.

Soit alors $f(x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}} \psi(x+h)$; alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, et $f > 0$. Soit enfin

$$\phi(x) := \frac{\psi(x)}{f(x)}.$$

Alors $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\sum \phi(x+h) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \frac{\psi(x+h)}{f(x+h)}$

Mais f est 1-périodique donc

$$\sum \phi(x+h) = \frac{1}{f(x)} \sum \varphi(x+h) = 1.$$

On a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T \sum_{h\in\mathbb{Z}} \phi(\cdot + h), \varphi \rangle$

$$= \langle T \sum_{h\in\mathbb{Z}} \phi \circ \tau_h, \varphi \rangle$$

$$= \langle \sum_{h\in\mathbb{Z}} (\phi T) \circ \tau_h, \varphi \rangle$$

car T est 1-périodique.

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \langle \phi T, \varphi \circ \tau_{-h} \rangle$.

On sait que $\phi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, soit p son ordre.

Alors $\forall h \in \mathbb{Z}$

$$|\langle \phi T, \varphi \circ \tau_{-h} \rangle| \leq C \sup_{|x|\leq 2} \sup_{|\alpha|\leq p} |\partial^\alpha (\varphi \circ \tau_{-h})(x)|$$

$\varphi \circ \tau_{-h}(x) = \varphi(x-h)$. On choisit $|h| \geq 3$

Alors comme $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\partial^\alpha \varphi(y)| \leq \frac{1}{\langle y \rangle^2} P_{2,p}(\varphi)$

on a $|\partial^\alpha \varphi(x-h)| \leq \frac{C}{||h|-2|^2} P_{2,p}(\varphi)$.

$\forall |h| \geq 3$, et $|x| \leq 2$.

Enfin on conclut que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|h|\geq 3} ||h|-2|^{-2} P_{2,p}(\varphi)$$

$$+ C\, p_{0,p}(\varphi).$$
$$\leq C'\, p_{2,p}(\varphi).$$ ■

PROPOSITION : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 1-périodique.

Alors $\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{2k\pi}$, où

$c_k = \mathcal{F}(\phi T)(2k\pi)$ où ϕ est n'importe quelle fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\sum \phi(x+k) = 1$.

Remarque : Soit T continue, 1-périodique. Soit $k \in \mathbb{Z}$

Alors
$$c_k = \mathcal{F}(\phi T)(2k\pi)$$
$$= \int e^{-ix\cdot 2k\pi} \phi(x) T(x)\, dx$$
$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} e^{-2i\pi kx} \phi(x) T(x)\, dx$$
$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \phi(x+\ell)\, T(x)\, e^{-2i\pi kx}\, dx.$$

par 1-périodicité de T et de $e^{-2i\pi kx}$

Et donc $c_k = \int_0^1 T(x) e^{-2i\pi kx}\, dx$, c'est bien le $k^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de T.

Démonstration : $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Alors $< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi >$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} < \phi \circ \tau_h T, \mathcal{F}\varphi >$$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} < (\phi T) \circ \tau_h, \mathcal{F}\varphi >$$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} < \phi T, \mathcal{F}\varphi \circ \tau_{-h} >.$$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} < \phi T, \mathcal{F}\varphi \circ \tau_h >$$

$$\mathcal{F}\varphi \circ \tau_h(\xi) = \hat{\varphi}(\xi + k)$$

$$= \int e^{-ix(\xi+k)} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int e^{-ixk} e_\xi(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \mathcal{F}(e_\xi \varphi)(k).$$

Donc

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi \circ \tau_h(\xi) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(e_\xi\varphi)(k)$$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} < \delta_k, \mathcal{F}(e_\xi\varphi) >$$

$$= < \mathcal{F}(\sum_{h\in\mathbb{Z}} \delta_h), e_\xi\varphi >$$

$$= 2\pi < \sum_{h\in\mathbb{Z}} \delta_{2h\pi}, e_\xi\varphi >$$

$$= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k\pi) e^{-2i\pi k\xi}.$$

Finalement

$$<\mathcal{F}T, \varphi> = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi < \phi T, \varphi(2k\pi) e_{2\pi k} >$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi \varphi(2k\pi) < \phi T, e_{2\pi k} >$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi \varphi(2k\pi) \mathcal{F}(\phi T)(2k\pi).$$

$$= < 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\phi T) \delta_{2k\pi}, \varphi >.$$

D'où $\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\phi T) \delta_{2k\pi}$.

VII ESPACES DE SOBOLEV :

DÉFINITION : Soit $s \in \mathbb{R}$.

- On appelle $H^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées f telles que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d ; <\xi>^{2s} d\xi)$.

  On note $\|f\|_{H^s} := \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 <\xi>^{2s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.

- On appelle $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées f telles que $\hat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d ; |\xi|^{2s} d\xi)$.

  On note $\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.

<u>Remarques</u> : • $s=0$: alors H^s et $\dot{H}^s$ s'identifient à L^2.

• $\dot{H}^s$ est un espace dit "homogène"

si $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ alors $\|f_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{d}{2}} \|f\|_{\dot{H}^s}$

En effet $\hat{f}_\lambda(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f_\lambda(x)\,dx$

$\|f_\lambda\|_{L^2}^2 = \lambda^{-2d} \int |\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)|^2 \, d\xi$ $\quad = \int e^{-i\lambda x \lambda^{-1}\xi} f(\lambda x)\,dx$

$= \lambda^{-d} \|\hat{f}\|_{L^2}^2$ $\quad = \lambda^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$.

On n'a rien de tel dans H^s.

• On verra que $f \in \dot{H}^s$ "$\Longleftrightarrow$" s dérivées de f sont dans L^2.

$s \geq 0$ $\quad f \in H^s$ "$\Longleftrightarrow$" toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre s sont dans L^2.

• $s \geq 0 \Rightarrow |\xi|^{2s} \leq \langle \xi \rangle^{2s}$

• $s \leq 0 \Rightarrow \langle \xi \rangle^{2s} \leq |\xi|^{2s}$

donc si $s \geq 0$: H^s s'injecte continûment dans $\dot{H}^s$.
et si $s \leq 0$: $\dot{H}^s$ ______________ H^s.

• "$\hat{f} \in L^1_{loc}$" peut être remplacée par d'autres hypothèses similaires.

• On peut aussi définir des espaces $W^{s,p}$, $\dot{W}^{s,p}$

($p=2$: H^s, $\dot{H}^s$)

THÉORÈME : • H^s est un espace de Hilbert $\forall s \in \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^s} := \int \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi.$$

• $\dot{H}^s$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{\dot{H}^s} := \int \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,|\xi|^{2s}\,d\xi$$

si et seulement si $s < \frac{d}{2}$.

Démonstration (le cas homogène).

$s < \frac{d}{2}$: montrons que $\dot{H}^s$ est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\dot{H}^s$. Alors $\hat{f}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d, |\xi|^{2s}d\xi)$ qui est complet, donc $\hat{f}_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}d\xi)$ vers une limite $g \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}d\xi)$.

Montrons que $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\int \mathbb{1}_{B(0,1)}|g| \leq \left(\int |\xi|^{2s}|g(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s}d\xi\right)^{1/2}$$

$< \infty$ car $s < \frac{d}{2}$

Par ailleurs $\mathbb{1}_{{}^cB(0,1)}\, g \in L^2(\mathbb{R}^d, \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$ qui est inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit $f := \mathcal{F}^{-1} g$. Alors $f \in \dot{H}^s$ et f_n converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d ; |\xi|^{2s} d\xi)$ par construction.